数理解析研究所講究録
1137 巻 2000 年 71-78



# Interpolating sequences on plane domains with hyperbolically rare boundary

大同工業大学　成田淳一郎　(Junichiro Narita)

## 1. 定義

複素平面の開集合 $D$ に対し, $D$ 上の有界正則関数の全体を $H^{\infty}(D)$, $D$ 上の有界調和関数の全体を $h^{\infty}(D)$ と表す。これらはともに sup-norm

$$||f||_{\infty}=\sup\{|f(z)|:z\in D\}$$

により Banach 空間になる。$\{z_j\}$ を $D$ 内の点列とする。任意の有界複素数列 $\{a_j\}$ に対して

$$f(z_j)=a_j \quad (j=1,2,\cdots) \tag{1.1}$$

をみたす関数 $f\in H^{\infty}(D)$ が存在するとき, $\{z_j\}$ は補間点列 (または $H^{\infty}(D)$-補間点列) であると言う。また, 任意の有界実数列 $\{a_j\}$ に対して (1.1) をみたす関数 $f\in h^{\infty}(D)$ が存在するとき, $\{z_j\}$ は調和補間点列 (または $h^{\infty}(D)$-補間点列) であると言う。正則関数の実部が調和関数であることにより, 補間点列ならば調和補間点列であることは直ちに分かる。

単位円板 $\Delta=\{|z|<1\}$ に対しては, Carleson [3] により $\Delta$ 内の点列 $\{z_j\}$ が補間点列であるための必要十分条件が

$$\inf_{k}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}\left|\frac{z_k-z_j}{1-\bar{z}_k z_j}\right|>0 \tag{1.2}$$

であることが示されている。さらに Garnett [5] により同じ条件 (1.2) が $\{z_j\}$ が調和補間点列であるための必要十分条件であることも示された。従って, 単位円板 $\Delta$ に対しては, 補間点列であることと調和補間点列であることが同値である。

本稿では, 一般の平面領域に対して, どの程度補間点列と調和補間点列が一致するかを調べることを目的とし, 単位円板以外にも, ある条件をみたす開集合に対しては, 補間点列と調和補間点列が一致すること, および逆に, 調和補間点列であるが, 補間点列でない点列が存在するような平面領域が存在することを示す。

## 2. 一致する場合

次の定理を示す。

**定理 2.1** $D$ を複素平面 $\mathbf{C}$ の有界開集合とする。$D$ の補集合 $\mathbf{C}\backslash D$ の各成分の直径の下限が正, 即ち

$$\inf\{\,\mathrm{diam}(E) : E \text{ は } \mathbf{C}\backslash D \text{ の成分}\,\} > 0$$

であるとき, $D$ 内の点列 $\{z_j\}$ に対して, 補間点列であることと調和補間点列であることとは同値である。

定理 2.1 を単位円板の場合に帰着させて示すために, Narita [9] による次の, 補間点列に関する局所性定理を用いる。

**定理 2.2** $D$ を複素平面 $\mathbf{C}$ の有界開集合, $S = \{z_j\}$ を $D$ 内の点列とする。任意の $\zeta \in \mathbf{C}$ に対して $\zeta$ のある近傍 $U$ が存在して $S \cap U$ が $H^\infty(D \cap U)$-補間点列であれば, $S$ は $H^\infty(D)$-補間点列である。

また, 単位円板の場合の Carleson, Garnett の結果もそれぞれ補間定数の評価も含めて必要になるので, ここで補間定数の定義と, あらためて, Carleson, Garnett の結果を述べる。

領域 $D$ の点列 $\{z_j\}$ が補間点列であるとき, 式 (1.1) による定まる $f \in H^\infty(D)$ と $\{a_j\} \in l^\infty$ との対応は, $H^\infty(D)$ から $l^\infty$ の上への有界線形写像であるから, 開写像定理によって, ある定数 $M$ が存在し, 任意の $\{a_j\} \in l^\infty$ に対して, (1.1) をみたす $f \in H^\infty(D)$ を

$$||f||_\infty \le M||\{a_j\}||_\infty$$

をみたすようにとれる。これをみたす最小の $M$ 即ち,

$$M = \sup_{||\{a_j\}||_\infty \le 1} \inf\{||f||_\infty : f \in H^\infty(D),\ f(z_j) = a_j\ (j = 1, 2, \cdots)\}$$

を $\{z_j\}$ に対する補間定数と言う。$H^\infty(D)$ を $h^\infty(D)$ に変更することにより同様に調和補間定数も定義される。

次の補間点列の特徴付けは Carleson [3] によるが, この補間定数の評価式の形は Garnett [6] (Chap. VII) による。

**定理 2.3** 単位円板 $\Delta$ 内の点列 $\{z_j\}$ に対し,

$$\delta = \inf_k \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty} \left| \frac{z_k - z_j}{1 - \bar{z}_k z_j} \right|$$

とおくと, $\{z_j\}$ が補間点列であるための必要十分条件は $\delta > 0$ である。またこのとき,

$\{z_j\}$ の補間定数を $M$ とすると,

$$\frac{1}{\delta} \leq M \leq \frac{c}{\delta}\left(1+\log\frac{1}{\delta}\right)$$

が成り立つ。ここに $c$ は点列 $\{z_j\}$ に依存しない絶対定数である。

単位円板の調和補間点列について Garnett [5] (および [6]) の中で, 定理としては, 「調和補間点列ならば補間点列である」とのみ記述されている。しかし, その証明により実際には, 調和補間定数の評価も含め, 次のことが示されている。

**定理 2.4** 単位円板 $\Delta$ 内の点列 $\{z_j\}$ に対し, $\delta$ を定理 2.3 同様に定義すると, $\{z_j\}$ が調和補間点列であるための必要十分条件は $\delta > 0$ である。またこのとき, $\{z_j\}$ の調和補間定数を $m$ とすると,

$$\delta \geq C(m)$$

が成り立つ。ここに $C(m)$ は $m$ のみにより定まる正定数である。

**定理 2.1 の証明**

$S = \{z_j\}$ とおく。補間点列ならば, 調和補間点列であることは容易であったから, $S$ が調和補間点列であると仮定して, $S$ が補間点列でもあることを示せばよい。

$$\varepsilon = \inf\{\,\mathrm{diam}(E) : E \text{ は } \mathbf{C}\backslash D \text{ の成分}\,\}$$

とおくと, 仮定より $\varepsilon > 0$ である。任意の $\zeta \in \mathbf{C}$ に対して, $\zeta$ の近傍

$$U = \{z : |z-\zeta| < \varepsilon/2\}$$

をとる。まず, $D \cap U$ の各成分 $U_\alpha$ は単連結領域となることを背理法により示す。

もし $U_\alpha$ が単連結でないとすると, $U_\alpha$ の補集合 $\mathbf{C}\backslash U_\alpha$ が有界な成分 $V$ を持つ。$V$ は閉集合の compact な成分であるから, Zoretti の定理 ([11] p.35) により, $U_\alpha$ に含まれるある Jordan 閉曲線 $C$ により $\mathbf{C}\backslash U_\alpha$ の非有界な成分と分割される。$V$ と交わる $\mathbf{C}\backslash D$ の成分の一つを $W$ とすると, $W$ は $\mathbf{C}\backslash C$ の 2 つの成分のうち, $V$ と同じ側に含まれ, よって $W \subset U$ をみたす。従って $\mathrm{diam}(W) < \varepsilon$ となるが, これは $\varepsilon$ の取り方に矛盾する。

$S$ の調和補間定数を $m$ とおく。$S \cap U_\alpha$ は $U_\alpha$ における調和補間点列であり, その調和補間定数は $m$ 以下である。$U_\alpha$ は単連結領域であるから, 単位円板に対する定理 2.3 および定理 2.4 を適用することが出来, $S \cap U_\alpha$ は $U_\alpha$ における補間点列でもあり, さらに, 定理 2.3 の定数 $c$ と定理 2.4 の定数 $C(m)$ により, その補間定数 $M$ は

$$M \leq \frac{c}{\delta}\left(1+\log\frac{1}{\delta}\right) \leq \frac{c}{C(m)}\left(1+\log\frac{1}{C(m)}\right)$$

と評価される。従って各成分ごとの解を合わせることにより, $S \cap U$ も $D \cap U$ における補間点列であることがわかる。従って, 定理 2.2 により, $S$ が $D$ における補間点列である。 [証明終]

## 3. 一致しない場合

一致しない場合を構成するために Zalcman 領域を定義する。これは, Zalcman [12] に始まり, 関数環やポテンシャル論の様々な現象を調べるのに用いられている領域である。(Hayashi–Nakai–Segawa [8], Hayashi–Nakai [7])

単位円板から原点を除いた領域 $\Delta_0 = \{0 < |z| < 1\}$ 内の実軸の正の部分に中心を持つ閉円板列 $\overline{\Delta}(c_n, r_n) = \{|z - c_n| \le r_n\}$ $(c_n > 0, r_n > 0)$ が,

$$\overline{\Delta}(c_n, r_n) \subset \Delta_0 \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

$$\overline{\Delta}(c_n, r_n) \cap \overline{\Delta}(c_m, r_m) = \emptyset \quad (n \ne m),$$

$$c_n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

をみたすとき, 領域 $\Delta_0 \backslash \cup_{n=1}^{\infty} \overline{\Delta}(c_n, r_n)$ を Zalcman 領域と呼ぶ。

次の定理は Behrens [2] Th.3.7 に含まれるが, 他の例を構成する基本にもなるので, 詳しく証明しておく。

**定理 3.1** Zalcman 領域 $R = \Delta_0 \backslash \cup_{n=1}^{\infty} \overline{\Delta}(c_n, r_n)$ が $\sum_{n=1}^{\infty}(r_n/c_n) < \infty$ をみたし, かつ原点が Dirichlet 問題に対する正則境界点であるとき, $R$ 内の点列 $\{z_j\}$ で, 調和補間点列であるが, 補間点列でないものが存在する。

**証明**

Zalcman [12] により, $\sum_{n=1}^{\infty}(r_n/c_n) < \infty$ をみたす Zalcman 領域 $R$ においては, 任意の $f \in H^{\infty}(R)$ に対して,

$$\lim_{\mathbf{R}^- \ni x \to 0} f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z} dz$$

が成り立つ。ここに $\mathbf{R}^- = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$ である。

従って, $\{z_j\}$ を $\mathbf{R}^-$ に含まれ, 原点に収束する点列とすると, $\{f(z_j)\}$ も収束する数列となるので, $\{z_j\}$ は補間点列にはなり得ない。以下, $\{z_j\}$ を十分早く原点に近づけることにより, $\{z_j\}$ を調和補間点列に出来ることを示す。

まず $z_1 \in R \cap \mathbf{R}^-$ を固定し, 領域 $R$ における $z_1$ の調和測度を $\mu_1$ とする。$t > 0$ に対し,

$$E(t) = \{z \in \partial R : |z| < t\}$$

とおく。$\mu_1(\{0\}) = 0$ であるから, ある $t_1 > 0$ が存在して, $\mu_1(E(t_1)) < 1/6$ をみたす。次に $z_2 \in \mathbf{R}^-$ を, $z_1 < z_2 < 0$, かつその調和測度 $\mu_2$ が, $\mu_2(E(t_1)) > 5/6$ をみたすようにとりたい。$E(t_1)$ 上 1, $\partial R \backslash E(t_1)$ 上 0 である境界関数 $g_1$ の Dirichlet 問題の解を $u_1$ とおくと, 仮定より原点が $R$ に対する正則境界点であるから,

$$\lim_{z \to 0} u_1(z) = 1$$

となり, $u_1(z_2) > 5/6$, $z_1 < z_2 < 0$ をみたす $z_2$ を取ることが出来る。

$$u_1(z_2) = \int_{\partial R} g_1\, d\mu_2 = \int_{E(t_1)} d\mu_2$$

であるから $\mu_2(E(t_1)) > 5/6$ が従う。

以下同様にして, $R \cap \mathbf{R}^-$ 上の点列 $\{z_j\}$ と正の実数列 $\{t_j\}$ を,

$$z_1 < z_2 < \cdots, \quad z_j \to 0 \quad (j \to \infty),$$

$$t_1 > t_2 > \cdots, \quad t_j \to 0 \quad (j \to \infty),$$

$$\mu_j(E(t_{j-1})) > 5/6 \quad (j = 2, 3, \cdots),$$

$$\mu_j(E(t_j)) < 1/6 \quad (j = 1, 2, \cdots)$$

をみたすようにとる。ただし $\mu_j$ は $z_j$ の調和測度である。

$$F_1 = \partial R \backslash E(t_1),$$

$$F_j = E(t_{j-1}) \backslash E(t_j) \quad (j = 2, 3, \cdots)$$

とおくと, 集合列 $\{F_j\}$ は互いに交わらず, かつ

$$\mu_j(F_j) > 2/3 \quad (j = 1, 2, \cdots)$$

をみたす。

$\{a_j\}$ を任意の有界実数列とし, (1.1) をみたす $f \in h^\infty(R)$ の存在をいう。$||\{a_j\}||_\infty = k$ とする。境界関数 $h_1$ を,

$$h_1(\zeta) = a_j \ (\zeta \in F_j) \quad (j = 1, 2, \cdots)$$

とおき, その Dirichlet 問題の解を $f_1$ とおくと, $||f_1||_\infty \le k$ であり,

$$|a_j - f_1(z_j)| = \left| a_j - \int_{\partial R} h_1\, d\mu_j \right| \le \int_{\partial R} |a_j - h_1|\, d\mu_j = \int_{\partial R \backslash F_j} |a_j - h_1|\, d\mu_j$$
$$\le \sup |a_j - h_1| \cdot \mu_j(\partial R \backslash F_j) \le 2k(1 - 2/3) = (2/3)k$$

となる。よって

$$||\{a_j - f_1(z_j)\}||_\infty \le (2/3)k$$

であり, $\{a_j\}$ から $f_1$ を作ったのと同様に,

$$||f_2||_\infty \le (2/3)k,$$

$$|a_j - f_1(z_j) - f_2(z_j)| \le (2/3)^2 k \quad (j = 1, 2, \cdots)$$

をみたす $f_2 \in h^\infty(R)$ を構成出来る。以下帰納的に $h^\infty(R)$ の関数列 $\{f_m\}$ を,

$$||f_m||_\infty \le (2/3)^{m-1} k \quad (m = 1, 2, \cdots),$$

$$\left| a_j - \sum_{l=1}^{m} f_l(z_j) \right| \le (2/3)^m k \quad (m = 1, 2, \cdots; j = 1, 2, \cdots)$$

をみたすように構成出来る。

$f = \sum_{m=1}^\infty f_m$ とおくと,

$$\|f\|_\infty \leq \sum_{m=1}^{\infty}(2/3)^{m-1}k = 3k,$$

$$f(z_j) = a_j \quad (j = 1, 2, \cdots)$$

をみたすので, $h \in h^\infty(R)$ が求める関数になっている。 [証明終]

定理 3.1 において, 条件 $\sum_{n=1}^{\infty}(r_n/c_n) < \infty$ は閉円板列の半径 $r_n$ が小さいほど成り立ち, 逆に原点が Dirichlet 問題に対する正則境界点であるという仮定は $r_n$ が大きいほど成り立つ。従って, 実際に補間点列と調和補間点列が一致しない平面領域の例が存在するというためには, この両方の条件をみたす $\{c_n\}$, $\{r_n\}$ が存在することを確認しておく必要がある。

$0 < b < a < 1$ をみたす定数 $a$, $b$ を固定する。

$$c_n = a^n,\ r_n = b^n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とおくと, $\sum_{n=1}^{\infty}(r_n/c_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(b/a)^n < \infty$ である。$a$, $b$ の値によっては, いくつかの(有限個の) 閉円板 $\overline{\Delta}(a^n, b^n)$ が交わるが, 例えば $b^N < (a^N - a^{N+1})/2 = a^N(1-a)/2$ をみたす自然数 $N$ をとり $R = \Delta_0 \setminus \cup_{n=N}^{\infty} \overline{\Delta}(a^n, b^n)$ とすれば $R$ は Zalcman 領域になる。以下この $R$ において, 原点が正則境界点であることを示す。

$$A_n = \partial R \cap \{a^{n+1/2} \leq |z| \leq a^{n-1/2}\}$$

とおき, $A_n$ の対数容量を $\mathrm{cap}(A_n)$ で表す。$n \geq N$ のとき $A_n = \partial\Delta(a^n, b^n)$ であり, 一般に半径 $r$ の円の対数容量は $r$ であるから, $\mathrm{cap}(A_n) = b^n$ である。よって, Wiener criterion ([4] または [10] p.104) の級数が

$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{n}{\log(1/\mathrm{cap}(A_n))} = \sum_{n=N}^{\infty}\frac{n}{-n\log b} = \sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{-\log b} = \infty$$

と発散するので, 集合 $\partial R$ は原点で thick である。従って $R$ において, 原点が Dirichlet 問題の正則境界点である。

Zalcman 領域の例では, 原点において領域の境界が, 有界正則関数に対しては十分に小さく, 有界調和関数に対しては十分に大きい (原点が正則境界点である) ことが本質であるようにも思われる。しかし次の定理が, このことが必ずしも補間点列と調和補間点列が一致しないための必要十分条件にはなり得ないことを示している。

**定理 3.2** 単位円板 $\Delta$ から, 実軸の正の部分に中心を持ち, 境界点 $1 \in \partial\Delta$ にのみ集積する互いに交わらない閉円板列を除いて得られる領域 $W$ と, $W$ 内の点列 $\{w_j\}$ で, 調和補間点列であるが, 補間点列でないものが存在する。

**証明**

定理 3.1 で構成した Zalcman 領域 $R = \Delta_0 \setminus \cup_{n=1}^{\infty} \overline{\Delta}(c_n, r_n)$ と $R$ 内の点列 $\{z_j\}$ を 1 つ取り固定する。また境界の部分集合 $F_j$ と点 $z_j$ の調和測度 $\mu_j$ を定理 3.1 の証明と同様にとる。最初の点 $z_1$ を除いて, 番号を付け直すことにより,

$$F_j \subset \cup_{n=1}^{\infty} \partial\Delta(c_n, r_n) \quad (j = 1, 2, \cdots)$$

と出来る。さらに各番号 $n$ に対し番号 $N(n)$ を,

$$\cup_{j=1}^{n} F_j \subset \cup_{m=1}^{N(n)} \partial\Delta(c_m, r_m) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

をみたすように取る。

単位円板 $\Delta$ 内に含まれ, 実軸の正の部分に中心を持つ開円板列 $\{V_n\}$ で, 互いに交わらず, 境界点 $1 \in \partial\Delta$ にのみ集積するものを1つ取る。さらに各 $V_n$ 内に, $N(n)$ 個の互いに交わらない閉円板

$$V_n \supset \overline{\Delta}(c_{n,k}, r_{n,k}) \quad (c_{n,k} > 0, r_{n,k} > 0) \quad (k = 1, 2, \cdots, N(n))$$

を, $V_n \setminus \cup_{k=1}^{N(n)} \overline{\Delta}(c_{n,k}, r_{n,k})$ が $\Delta \setminus \cup_{k=1}^{N(n)} \overline{\Delta}(c_k, r_k)$ と相似になるようにとる。この相似写像を $\varphi_n$:

$$\varphi_n\left(\Delta \setminus \cup_{k=1}^{N(n)} \overline{\Delta}(c_k, r_k)\right) = V_n \setminus \cup_{k=1}^{N(n)} \overline{\Delta}(c_{n,k}, r_{n,k})$$

とし,

$$W = \Delta \setminus \cup_{n=1}^{\infty} \cup_{k=1}^{N(n)} \overline{\Delta}(c_{n,k}, r_{n,k}),$$

$$w_{n,j} = \varphi_n(z_j) \quad (j = 1, 2, \cdots, n;\ n = 1, 2, \cdots)$$

とおくと, 領域 $W$ と $W$ 内の点列

$$S = \{w_{n,j} : j = 1, 2, \cdots, n;\ n = 1, 2, \cdots\}$$

が定理の主張をみたすことを言う。

まず $S$ が調和補間点列であることは,

$$\tilde{F}_{n,j} = \varphi_n(F_j) \quad (j = 1, 2, \cdots, n;\ n = 1, 2, \cdots)$$

とおくと, $\partial W$ の集合列

$$\{\tilde{F}_{n,j} : j = 1, 2, \cdots, n;\ n = 1, 2, \cdots\}$$

は互いに交わらず, 点 $w_{n,j}$ の $W$ における調和測度を $\tilde{\mu}_{n,j}$ とすると,

$$\tilde{\mu}_{n,j}\left(\tilde{F}_{n,j}\right) > \mu_j(F_j) > 2/3$$

をみたすことから, 定理3.1の証明と同様に, $S$ が $W$ 内で調和補間点列であることが示される。

次に $S$ が補間点列でないことを, 背理法により示す。もし, $S$ が補間点列であるとすると, 任意の有界数列 $\{a_j\} \in l^{\infty}$ に対して, ある $\tilde{f} \in H^{\infty}(W)$ が存在し,

$$\tilde{f}(w_{n,j}) = a_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n;\ n = 1, 2, \cdots)$$

をみたす。

$$f_n = \tilde{f} \circ \varphi_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とおくと, $f_n \in H^{\infty}(R)$, $||f_n||_{\infty} \leq ||\tilde{f}||_{\infty}$ $(n = 1, 2, \cdots)$,

$$f_n(z_j) = \tilde{f} \circ \varphi_n(z_j) = \tilde{f}(w_{n,j}) = a_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n;\ n = 1, 2, \cdots)$$

であり, 関数列 $\{f_n\}$ から広義一様収束する部分列をとり, その極限を $f \in H^\infty(R)$ とすると,

$$f(z_j) = a_j \quad (j = 1, 2, \cdots)$$

となるから, $\{z_j\}$ が $R$ 内の補間点列であることになり, $R$ と $\{z_j\}$ の取り方に反する。

[証明終]

## 参考文献


[1] M. Behrens: *The maximal ideal space of algebras of bounded analytic fuctions on infinitely connected domains,* Trans. Amer. Math. Soc. **161** (1971), 358–380.

[2] M. Behrens: *Interpolation and Gleason parts in L-domains,* Trans. Amer. Math. Soc. **286** (1984), 203–225.

[3] L. Carleson: *An interpolation problem for bounded analytic funciotns,* Amer. J. Math. **80** (1958), 921–930.

[4] T. Gamelin and H. Rossi: *Jensen measures and algebras of analytic functions,* in *Function algebras,* F. Birtel (ed.), Scott, Foresman and Co., (1966), 13–35.

[5] J. Garnett: *Interpolating sesquences for bounded harmonic funciotns,* Indiana Univ. Math. J. **21** (1971), 187–192.

[6] J. Garnett: *Bounded analytic functions,* Academic Press, New York, 1981.

[7] M. Hayashi and M. Nakai: *A uniqueness theorem and the Myrberg phenomenon,* J. d'Analyse Math. **76** (1998), 109–136.

[8] M. Hayashi, M. Nakai and S. Segawa: *Bounded analytic functions on two sheeted discs,* Trans. Amer. Math. Soc. **333** (1992), 799–819.

[9] J. Narita: *Interpolating sesquences on plane domains,* Kodai Math. J. **13** (1990), 311–316.

[10] M. Tsuji: *Potential theory in modern function theory,* Maruzen, Tokyo, 1959.

[11] G. Whyburn: *Topological Analysis,* Princeton University Press, New Jersey, 1964.

[12] L. Zalcman: *Bounded analytic functions on domains of infinite connectivity,* Trans. Amer. Math. Soc. **144** (1969), 241–270.